ESCAE **Concours National d'admission 1987**

MATHÉMATIQUES I

Algèbre et analyse

OPTION ÉCONOMIQUE

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet seront distribuées 2 feuilles de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible...).

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1 *(sur 11 points)*

I

1° On considère la matrice carrée d'ordre 3 :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 4 & 16\end{pmatrix}$$

Déterminer l'inverse A^{-1} de la matrice A.

(Les calculs intermédiaires doivent figurer sur la copie.)

2° Soient a, b et c trois nombres réels vérifiant la condition :

$$a+bx+cx^2>0$$

pour tout $x\geqslant 1$.

On considère la fonction :

$$f : I=[1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{\ln x}{a+bx+cx^2}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

Déterminer, en utilisant I 1°, les coefficients a, b et c pour que :

$$f(2)=\frac{\ln 2}{8}$$

$$f(3)=\frac{\ln 3}{15}$$

et :

$$f(4)=\frac{\ln 4}{24}$$

3° On désigne par h la fonction :

$$h : I=[1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longrightarrow x+2-2(x+1)\ln x$$

a. Justifier la dérivabilité de h sur I et établir que, pour tout $x\geqslant 1$, $h'(x)<0$.

b. Justifier l'existence et l'unicité d'un unique réel x_0 appartenant à I tel que $h(x_0)=0$.

Déterminer l'entier naturel n tel que :

$$\frac{n}{100}\leqslant x_0<\frac{n+1}{100}$$

En déduire le signe de $h(x)$.

II

Soit g la fonction :

$$g : I=[1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{\alpha \ln x}{x^2+2x}$$

où α désigne un nombre réel strictement positif, dont la valeur sera fixée à 12 uniquement dans les questions II 1° *d*. et II 2° *c*.

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° *a*. Justifier la dérivabilité de g sur I et vérifier que pour tout $x\geqslant 1$:

$$g'(x)=\frac{\alpha h(x)}{(x^2+2x)^2}$$

où h désigne la fonction introduite en I 3°.

b. Étudier les variations de g et la branche infinie de $\mathscr{C}_g$, et montrer que :

$$g(x_n)=\frac{\alpha}{2x_0(x_n+1)}$$

c. Préciser l'équation de la droite Δ tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

d. Tracer $\mathscr{C}_g$ et Δ, l'unité graphique étant égale à 4 cm.

2° On note k la restriction de g à l'intervalle $J=[1, x_n]$.

a. Démontrer que k réalise une bijection de J sur un intervalle que l'on précisera (on ne cherchera pas à expliciter la fonction réciproque k^{-1}).

b. Montrer que k^{-1} est dérivable en 0.

Calculer $(k^{-1})'(0)$.

c. Construire la courbe représentative de k^{-1} dans le repère précédent, en précisant les tangentes particulières.

3° *a*. Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive G, sur I, de la fonction g, prenant la valeur 0 en $x=1$, et montrer qu'elle vérifie, pour tout $x\geqslant 1$:

$$G(x)=\int_1^x g(t)\,dt$$

(On ne cherchera pas à expliciter cette primitive.)

b. Établir que la fonction G est strictement croissante sur I.

4° Prouver que, pour tout $x\geqslant 1$:

$$\int_1^x \frac{\alpha \ln t}{(t+1)^2}\,dt\leqslant G(x)\leqslant \int_1^x \frac{\alpha \ln t}{t^2}\,dt$$

5° *a*. Calculer, pour tout x élément de I, l'intégrale :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

b. En déduire que, pour tout $x\geqslant 1$: $G(x)\leqslant \alpha$

c. Prouver que l'intégrale impropre :

$$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$$

est convergente.

Tournez la page S.V.P.

6° *a*. Calculer, pour tout $x \geqslant 1$, l'intégrale :

$$\int_1^x \frac{dt}{t(t+1)}$$

(On pourra montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $t \geqslant 1$: $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$.)

b. Établir que :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{(t+1)^2}\,dt = \ln 2 + \ln\frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1}$$

c. En déduire un encadrement de $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$.

PROBLÈME 2 *(sur 9 points)*

I

Une raffinerie fonctionne selon les données suivantes :

a. Renseignements techniques :

— 8 000 tonnes de brut de trois qualités différentes sont traitées chaque jour et la raffinerie doit toujours fonctionner à cette capacité.

— Les quantités de produits obtenus (exprimées en tonnes) après raffinage de 100 tonnes de brut sont les suivantes :

Matière première / Production	Brut n° 1 Moyen-Orient	Brut n° 2 Amérique	Brut n° 3 Sahara
Gaz de pétrole liquefiés (GPL)	5	—	6
Essence	24	18	30
Gazole	36	32	30
Fuel lourd	30	45	30
Combustible brûle en raffinerie	5	5	4
	100	100	100

b. Renseignements commerciaux :

— Les prix d'achat du brut (frais de transport compris) sont :

brut n° 1 : 1 000 F/tonne

brut n° 2 : 800 F/tonne

brut n° 3 : 1 100 F/tonne

— Les prix de vente des produits au sortir de la raffinerie sont :

gaz de pétrole liquefiés : 1 500 F/tonne

essence : 2 200 F/tonne

gazole : 2 100 F/tonne

fuel lourd : 600 F/tonne

A

Sachant que pour une journée donnée de fonctionnement, on a obtenu 2 700 tonnes de gazole et 260 tonnes de GPL :

1° Calculer les quantités des différents bruts B_1, B_2 et B_3 constituant les 8 000 tonnes traitées ce jour-là.

2° Déterminer l'ensemble de la production de la raffinerie et le montant total des ventes réalisées par cette production, ce jour-là.

3° En supposant de plus que cette production a permis un bénéfice de 730 000 F, montrer que le montant des charges (salaires, énergie, stockage...) s'élève, pour ce jour, à 3 500 000 F.

B

Des contrats stipulent que la raffinerie doit acheter chaque jour les quantités minimales suivantes : 1 000 tonnes de brut n° 1, 1 000 tonnes de brut n° 2 et 500 tonnes de brut n° 3.

En outre, il n'est pas possible d'écouler sur le marché plus de 300 tonnes de GPL ni plus de 3 000 tonnes de fuel lourd par jour.

Enfin, il est nécessaire de fournir au moins 1 800 tonnes d'essence par jour.

On note respectivement x, y, z les centaines de tonnes de brut B_1, B_2, B_3 traités au cours d'une journée.

On rappelle que $x + y + z = 80$.

1° Écrire le système des contraintes à l'aide des seules variables x et y.

2° Construire le polygone des contraintes de la raffinerie.

3° En supposant que le montant journalier des charges reste égal à 3 500 000 F, établir que le bénéfice quotidien B, exprimé en fonction de x et y, correspond à :

$$B(x, y) = 7{,}9x + 7{,}8y + 180$$

l'unité choisie étant le kF (1 kF = 1 000 F).

4° Tracer sur le graphique de 2°, la droite représentant l'ensemble des couples (x, y) tels que :

$$B(x, y) = 730$$

5° Quelles doivent être les quantités des différents bruts traités quotidiennement pour maximiser le bénéfice B ?

Quel est alors le bénéfice optimal ?

6° Une modification du contrat d'approvisionnement en brut saharien peut-elle présenter des avantages ?

Si oui, préciser cette modification et déterminer le nouveau bénéfice optimal réalisable.

II

La raffinerie envisageant une extension de ses activités, examine deux propositions de financement :

Proposition 1 :

— La somme empruntée est remboursée à l'aide de versements mensuels tous égaux, effectués le dernier jour de chaque mois.

— 1ère échéance un mois après l'emprunt.

— Taux d'intérêt mensuel $t = 0{,}8\,\%$ (un client ayant envers la banque une dette de x francs le 1er jour d'un mois donné, voit sa dette, le dernier jour de ce mois, s'il ne s'en est pas acquitté auparavant, augmentée des intérêts égaux à $x \cdot t$).

Proposition 2 :

— Remboursement par versements mensuels tous égaux.

— 1ère échéance un mois après l'emprunt

— Taux annuel $t' = 10\,\%$. (Si au cours d'une année il apparait envers la banque, sur une durée de 1 mois, une dette de x francs, des intérêts d'un montant de $x \cdot \frac{t'}{12}$ sont dus à la fin de cette année.)

1° Étude de la proposition 1 :

On désigne par D_0 le capital emprunté, t le taux mensuel, R le montant d'un remboursement mensuel et par D_n, pour $n \geqslant 1$, le montant de la dette après le n-ième remboursement.

a. Justifier que : $D_1 = D_0 \cdot (1 + t) - R$

Déterminer D_n en fonction de D_{n-1}, t et R.

b. Calculer D_n en fonction de D_0, t, R et n.

2° Étude de la proposition 2 :

On désigne par D'_0 le capital emprunté, t' le taux annuel, R' le montant d'un remboursement mensuel et par D'_k, pour $k \geqslant 1$, le montant de la dette après le 12-ième versement de la k-ième année.

a. Montrer que le montant des intérêts qui sont dus à la fin de la k-ième année, en raison de la dette courant le i-ième mois de cette k-ième année est :

$$[D'_{k-1} - (i-1)R'] \cdot \frac{t'}{12}$$

Vérifier que, pour les 12 mois, le montant total I_k des intérêts dus à la fin de la k-ième année est :

$$I_k = D'_{k-1} \cdot t' - 5{,}5 \cdot R' \cdot t'$$

b. En remarquant que :

$$D'_k = D'_{k-1} + I_k - 12R'$$

Calculer D'_k en fonction de D'_0, t', R' et k.

3° La raffinerie veut emprunter 15 000 000 F qu'elle désire rembourser en 5 ans.

Calculer les remboursements R et R' au franc près.

Conclure.